

クロソイド曲線を用いた曲率変化の滑らかな軌道生成

Robot Trajectory Generation with Smoothly Changing Curvature Using the Clothoid Curve

○ 澁谷 大 (静岡大) 正 臼杵 深 (静岡大学)
正 三浦 憲二郎 (静岡大)

Dai SHIBUYA, Shizuoka University, f0810079@shizuoka.ac.jp
Shin Usuki, Shizuoka University
Kenjiro T. MIURA, Shizuoka University

In this paper we propose optimization methods for trajectory design using clothoid curves in two-dimensional space. As a trajectory path, the clothoid curve is superior to other ones because its curvature varies linearly with its curve length. However, a single clothoid segment cannot generally satisfy both tangent and curvature conditions at its end points because the number of its parameters is insufficient. In order to solve this type of the problem, “triple clothoid” was introduced to match both tangent and curvature boundary conditions. The triple clothoid is a set of three clothoid segments connected internally with curvature as well as tangent continuity. It has sufficient parameters needed for tangent and curvature matching at its end point. The triple clothoid segments were used to construct a smooth transition passing through arbitrary point sequence. The result trajectory possesses curvature continuity and matches all tangent and curvature designations at the giving points. However, the triple clothoid curve that passes through specified points is not uniquely determined. Therefore we propose optimization methods to minimize the trajectory path length and the energy consumption measure introduced in this paper.

Key Words: trajectory design, triple clothoid curve, optimization, path length, energy consumption

1. 緒言

ロボット等の自由度の高い機構を持つ機械における動作制御において、その軌道を設計することは重要な課題の一つである。現在用いられている軌道設計法には直線や円弧の組み合わせを用いたものや、ベジエ曲線やスプライン曲線などを用いた曲線補間による軌道設計法が用いられている。しかし、曲率の不連続性から無駄なエネルギーの消費といった問題があり、動力学的に質の高い軌道とはいえない。

このような問題を解決するため、クロソイド曲線を軌道生成に導入する。クロソイド曲線は図 1 に示す曲線であり、曲率が曲線長に対し一次関数となる曲線である。その特性から動力学的に質の高い軌道を描くので、高速道路のカーブやジェットコースターのループなどに用いられている。ロボットの軌道設計では、指定した通過点が複数個でも対応できるように、端点での接線方向と曲率を同時に指定できることが望ましい。そこで3つのクロソイド曲線のセグメントからなる“三連クロソイド曲線” [1] を導入することで、より優れた軌道を生成する。

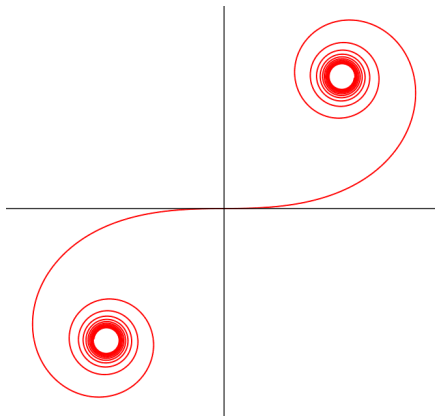


Fig. 1 A double-end clothoid spiral

本研究では二次元（以降 2D）での三連クロソイド曲線を用いた軌道生成をおこない、その上で、生成された軌道を評価・検討する。さらに、与えられた条件を満たす軌道の最適化としてエネルギーおよび経路長の最小となる経路の算出をおこなう。

2. クロソイド曲線の基本式

任意の曲線セグメントは一般に式(1)で表わされる。

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \int_0^s \mathbf{u} ds = \mathbf{P}_0 + h \int_0^{\frac{s}{h}} \mathbf{u} ds \\ 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

\mathbf{P}_0 は始点、 \mathbf{P}_1 は終点であり、 \mathbf{u} は曲線上任意の単位接線ベクトル、 s は始点からの弧長、 h は曲線の全長を表わす。 S は無次元の曲線長である。次に単位接線ベクトル \mathbf{u} を示す。これは複素平面において式(2)のように定義する。

$$\begin{cases} \mathbf{u} = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ \phi = \phi_0 + \phi_v S + \phi_u S^2 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 ϕ は曲線上任意点の接線方向を表わす。クロソイド曲線のセグメントを図 2 に示す。また、曲率 κ は式(2)より以

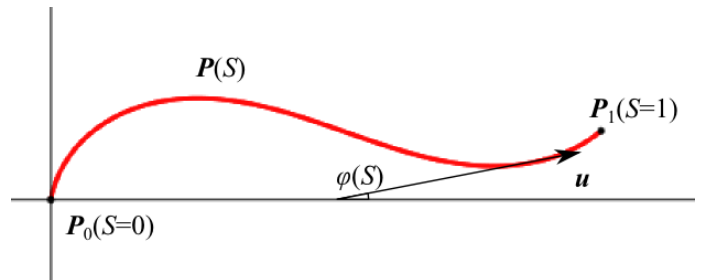


Fig. 2 A clothoid segment

下の式(3)で表される。

$$\kappa(S) = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{hdS} = \frac{\phi_v + 2\phi_u S}{h} \quad (3)$$

このように、式(3)は曲率が曲線長に対して一次関数であることを示している。

3. クロソイド曲線による軌道生成の問題点

クロソイド曲線を用いて軌道生成を行う場合、曲率の変化が滑らかになるため軌道上を運動する物体に作用する力の変化が直線的となり、動力学的に良質な軌道が生成できる。しかし、3つのセグメントからなるクロソイド曲線では、指定した通過点での接線方向を指定することは可能だが、パラメータ数の関係から通過点における曲率を指定することはできない。このため、指定した通過点が複数個あるような軌道生成において、指定した通過点での曲率が不連続になってしまう、動力学的に優れた軌道を生成できない、この問題を解決するためにはパラメータ数を増やす必要があるが、曲率が弧長に対して一次関数である必要があるため、接線角 ϕ において、 S の3乗以上の項が含まれることは許されない。そこで、三連クロソイド曲線を導入する。

4. 三連クロソイド曲線による軌道生成

三連クロソイド曲線とは端点間を3つのクロソイド曲線に分割したクロソイド曲線である。三連クロソイド曲線の単位接線ベクトル u を式(4)、(5)に示す。

$$u = \cos\phi + i\sin\phi \quad (4)$$

$$\phi(S) = \begin{cases} \phi_{10} + \phi_{11}S + \phi_{12}S^2 & [0, S_1] \\ \phi_{20} + \phi_{21}(S-S_1) + \phi_{22}(S-S_1)^2 & [S_1, S_2] \\ \phi_{30} + \phi_{31}(S-S_2) + \phi_{32}(S-S_2)^2 & (S_2, 1] \end{cases} \quad (5)$$

ここで、定数 S_1 と S_2 ($0 < S_1 < S_2 < 1$)は三連クロソイド曲線内部のつなぎ目であり、本研究では全体のバランスを考え、 $S_1=0.25$ 、 $S_2=0.75$ とした。 $\phi_{10} \sim \phi_{32}$ 及び h はパラメータを示す。パラメータは全部で10個あるが、つなぎ目における接線角方向及び曲率が一致するように接線方向を定めている。したがって、全パラメータの中で4つのパラメータは一意に定まるため独立なパラメータは6つとなる。このため、端点における接線方向のみならず曲率の指定が可能となる。三連クロソイド曲線のセグメントを図3に示す。また、曲率 κ は式(5)より以下の式(6)で表される。

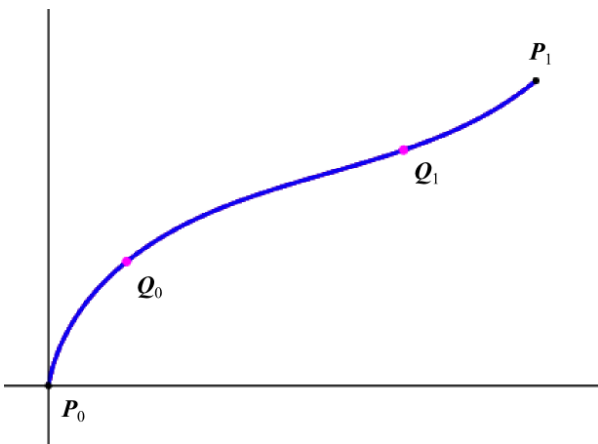


Fig. 3 A triple clothoid segment. joint points Q_0 and Q_1

$$\kappa(S) = \begin{cases} \phi_{11} + 2\phi_{12}S & [0, S_1] \\ \phi_{21} + 2\phi_{22}(S-S_1) & [S_1, S_2] \\ \phi_{31} + 2\phi_{32}(S-S_2) & (S_2, 1] \end{cases} \quad (6)$$

式(6)より、曲率は弧長の一次関数であり、三連クロソイド曲線のつなぎ目において値が一致する。

5. 単一および三連クロソイド曲線の比較

複数の通過点を指定しそれらの点を補間するよう、始点から終点までが1つのセグメントである単一クロソイド曲線と3つのセグメントからなる三連クロソイド曲線の比較をおこなう。指定する通過点は正方形の頂点を結び、全体でS字を描く軌道を生成する。生成された軌道を図4に、またそのときの弧長と曲率の変化の様子を図5に示す。ここで、赤線で示した軌道は単一クロソイド曲線、青線で示した軌道は三連クロソイド曲線である。

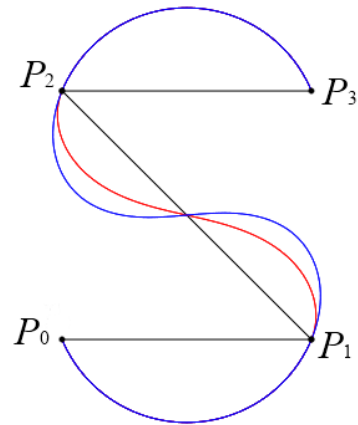


Fig. 4 A s-shaped curve
Single clothoid:red curve
Triple clothoid:blue curve

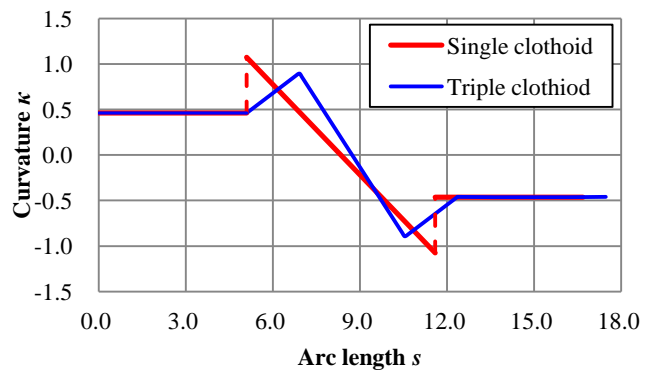


Fig. 5 Comparison of trajedy diagram

図4における二つの軌道では、 $P_0 \sim P_1$ および $P_2 \sim P_3$ での軌道は一意している。それに対して、 $P_1 \sim P_2$ では異なる軌道を示した。これは三連クロソイド曲線を用いた軌道では P_1 および P_2 における曲率が一致しているためである。また、図5よりグラフが直線で示されているため、クロソイド曲線の曲率が弧長に対して直線的に変化していることが確認できる。軌道の全長は単一クロソイド曲線による軌道のほうが内側を経由しているため短い。しかし、図5を見るとわかるとおり単一クロソイド曲線を用いて算出された軌道では曲率が不連続で

ある。これは P_1 および P_2 における曲率の変化を表している。それに対して三連クロソイド曲線による軌道は常に曲率の変化が連続的になっている。そのため、指定された通過点が複数個ある軌道設計において、単一クロソイド曲線を用いた軌道設計よりも三連クロソイド曲線を用いた軌道設計のほうが、動力学的に優れた軌道を生成することができることが確認できる。

6. エネルギーの式の導出

算出された曲線の幾何学的特性から生成される経路における消費エネルギーの算出を行う。軌道に沿って運動する質量 m の物体に生じる任意点において作用する力 F を求めるにはその加速度 a の導出が必要である。ここで、 a とは任意の位置ベクトルの時間による二階微分により導出される。これはちょうどその曲線における曲率 κ に相当するため、物体に作用する力は式(7)で表わされる。

$$F=ma=m\kappa(s)n \tag{7}$$

ここで、 n は曲線の任意点における単位法線ベクトルを示す。次に式(7)から消費エネルギー E を算出する。消費エネルギー E は物体に生じる力を線積分することで算出することができる。したがって消費エネルギー E は式(8)で表すことができる。

$$E=m \int_0^h |F(s)| ds=m \int_0^h |\kappa(s)| ds \tag{8}$$

ここで、物体の質量 m および移動速度を一定値としたとき、消費エネルギー E は曲率 κ と曲線の全長 h から求まる値であることが分かる。

7. エネルギーと経路長の算出

式(8)をもちいて各軌道における消費エネルギー E と経路長 h を算出し比較する。図 6 では生成される軌道がジグザグなるように指定した通過点を対照的にとった。また、 P_0 での接線方向は $0^\circ \sim 180^\circ$ まで 10° 刻みに変化させ、 P_3 をそれと対象となるよう変化させた。 P_1 と P_2 での接線方向はすべて 0° である。指定点 $P_0 \sim P_3$ における曲率は、一度同じ指定点を先の接線方向の値を用いて単一クロソイド曲線で軌道生成をおこない、そのときの指定点 $P_0 \sim P_3$ における曲率の値を用いた。 P_1 と P_2 ではその前後の単一クロソイド曲線で、曲率が小さいほうを採用した。そのため、図 6 における軌道は 1 自由度における軌道生成である。生成された各軌道の消費エネルギー E と経路長 h を図 7 に示す。

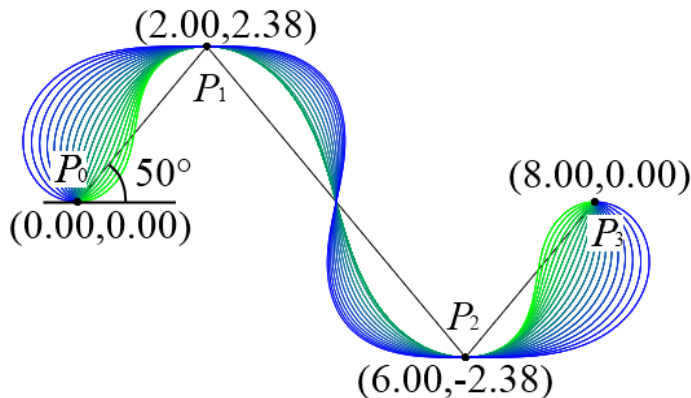


Fig. 6 One-degree-of-freedom trajectories of triple clothoid

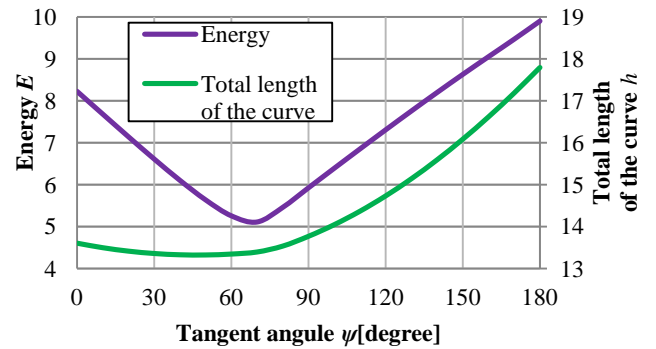


Fig. 7 Energy and length diagram

図 7 より、指定した通過点が一致していたとしても、経路が異なると、消費エネルギーや経路長も異なることがわかる。消費エネルギーと曲線の全長はそれぞれ極小値を持っており、それぞれの極値をとるときの軌道は異なる。そこで、消費エネルギー最小となる経路を青線、曲線の全長が最小となる経路を緑線で図 8 に示す。またそのときの数値データを表 1 に示す。

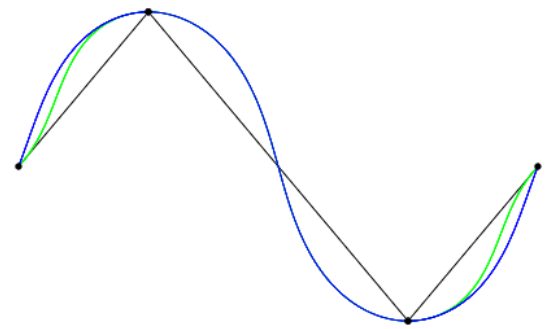


Fig. 8 Optimal one-degree-of-freedom trajectories
Energy minimum:blue curve
Length minimum:green curve

Table. 1 Data of optimal one-degree-of-freedom trajectory

	Tangent angle ψ	Energy E	Length h
Energy minimum	69°	5.10	13.4
Length minimum	47°	5.77	13.3

2つの経路を比較すると接線角は 20° ほどの差があることがわかる。また、消費エネルギーと経路長では、経路長のほうが大して差が生じていないことがわかる。実際の軌道設計においては、消費エネルギーが最小もしくは経路長が最短となる様な軌道だけでなく、その中間にある様な条件となる軌道をもとめられることも考えられる。したがって今回の条件においては接線方向が $47^\circ \sim 69^\circ$ の間にある経路が有用な経路であるといえる。

8. 最適経路の算出

図 8 では消費エネルギーと曲線の全長が最小となる経路をもとめることができた。消費エネルギーを抑えることで、ロボットが運動するときの電力コストの削減やロボットへの負荷の軽減が望まれ、経路長が最短となることで移動時間が最速となるといった利点が考えられる。しかし、しらみつづしに多

数の経路を生成し、それぞれ消費エネルギーと経路長を算出していくのでは効率が悪い。図 6 での軌道生成の条件は 1 自由度における生成であり、より複雑な条件ではこのような手法で最適な経路を算出することはより困難となる。そこで、与えられた条件から最適経路を一意的に算出することがもとめられる。しかし、三連クロソイド曲線の基本式は複雑であり、微分を用いた勾配情報からの探索は難しい。さらに、指定した通過点の数が多いほど、それに比例して軌道設計における自由度は増加する。

そこで、これらの問題を解決する解析手法として“滑降シンプレックス法” [2] を用いる。これは高自由度な目的関数に対応した、目的関数の勾配情報を必要としない解析手法である。滑降シンプレックス法を用いて図 6 と同じ通過点を指定し、最適化された経路を図 9 に示す。また、その時の数値データを表 2 に示す。

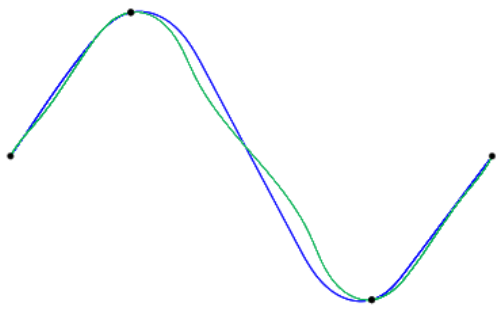


Fig. 9 Optimal eight-degree-of-freedom trajectories
Energy minimum:blue curve
Length minimum:green curves

Table. 2 Date of eight-degree-of-freedom Trajectory

Object function	Variable	P0	P1	P2	P3	Energy/ Length
Energy	Tangent[°]	54.7	12.1	16.0	53.0	4.09/
	Curvature	0.08	-1.56	1.64	0.00	12.9
Length	Tangent[°]	61.7	7.80	6.30	65.0	5.59/
	Curvature	-0.74	-1.85	1.86	0.82	12.8

消費エネルギー最小経路は全体的に無駄に遠回りをせず、また蛇行をしない滑らかな軌道であるのに対して、経路長が最短な経路は各通過点を直線で結んだ経路にできるだけ近づいているような軌道であり、複数回蛇行している。図 8 での経路と比較すると、変数を増加させて算出した分、消費エネルギーと曲線の全長はともにより小さな値を示している。

図 9 における両軌道の経路長は、どちらもさほど差はないのに比べ、消費エネルギーは大きく差が生じている。これは最短経路では多くの蛇行が生じていることが原因である。このため、総合的に判断すると、消費エネルギーが最小となる経路のほうが優れた経路であると思われる。

しかし、滑降シンプレックス法を用いた解析では、常に正確な値が算出されるわけではなく、特に自由度が多くなるとその傾向が強くなるという問題がある。そこで今度はより多くの通過点を指定した場合でも対応できるように、曲率を変数から外して最適化をおこなう。指定する通過点を 6 つに増やし、その点における接線方向のみを変数とした最適化された軌道を図 10 にしめす。

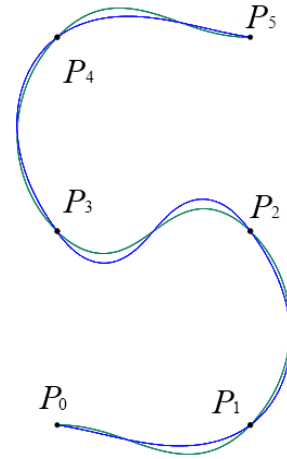


Fig. 10 Optimal six-degree-of-freedom trajectories
Energy minimum:blue curve
Length minimum:green curve

Table. 3 Date of six-degree-of-freedom Trajectory

Object function	Energy E	Length h
Energy	8.93	21.9
Length	8.61	22.1

ここで、各通過点における曲率は図 6 のものと同じように、単一クロソイド曲線を用いて定めた。曲率を変数に含まずに計算することで、ここでは 6 自由度での軌道生成となっている。このように、各通過点における接線方向のみを変数とすることで、多くの通過点を指定した場合でも最適化することができる。しかし、曲率を変数に含まない場合、最適化された経路は、目的関数が最小値を示す経路ではない。そのため、より多くの通過点が指定されているような軌道設計では曲率を変数として扱わない方法は有用ではあるが、厳密に最小値をもとめたい場合には不向きである。

9. 結言

ロボットの軌道設計において、クロソイド曲線を用いることで力学的に良質な軌道を生成することができる。そこで、端点における接線方向および曲率を指定することができる三連クロソイド曲線を用いることで、指定した通過点が複数ある軌道設計において、軌道全体で力学的に良質な軌道を生成できることが確認できた。

さらに、軌道の最適化として消費エネルギーが最小、および経路長が最短となる経路の算出を試みた。そこで、数値解析手法として滑降シンプレックス法を用いることで、最適な軌道を生成することができた。

今後はさらに高自由度な条件における軌道の最適化をおこなう。また、三次元空間における軌道設計に研究する。

文 献

- [1] 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, “三連クロソイドによる自由点列補間”, 精密工学会誌, 2010.
- [2] Press, W.H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., 丹慶 勝市, 佐藤 俊郎, 奥村 晴彦, 小林 誠, 訳, “ニューメリカルレシピ・イン・シー 日本語版—C 言語による数値計算のレシピ”, 技術評論社, 1993.