

3次元形状表現の基礎 –細分割曲面による形状表現–*

Fundamentals of 3D Geometric Representation –Subdivision Surface Representation–

三浦憲二郎**
(Kenjiro T. Miura)

1. はじめに

工業製品の設計工程において利用される3次元形状表現として、主として用いられているものは、1) ポリゴンメッシュ、2) NURBS (Bézier と B-spline を含む)、及び3) 細分割曲面である。NURBS 曲面は、複雑な自由曲面を含む3次元形状を厳密に表現することを目的として利用される。これに対して、ポリゴンメッシュは、形状表現の厳密さを追及するのではなく、形状を多面体として簡略化し、表示を高速化するために用いられるとともに、解析用のモデルとしてCAE等において利用される。

細分割曲面は、ポリゴンメッシュとNURBSの長所を兼ね備えており、今後設計現場での有効活用が期待されている3次元形状表現である。NURBSと同様に形状を厳密に表現するとともに、穴の開いているような複雑な位相を持つ形状を表現することもできる。また、細分割の深さ(分割回数)を浅く(少なく)すればポリゴンメッシュのように、高速に表示することも可能である。本稿ではこれらの表現の長所と短所を述べるとともに、NURBSと細分割曲面の基礎理論についても概説する。さらに、細分割理論に関連した適応的な細分割に関する最近の研究について紹介する。

2. 各表現の長所と短所

本章では、ポリゴンメッシュ、NURBS、及び細分割曲面の長所・短所を述べる。

2.1 ポリゴンメッシュ

ポリゴンメッシュは、図1に示すようにポリゴン (polygon:多角形) の集まりとして3次元形状を表現したものである。頂点 (vertex) を複数のポリゴンが共有するとともに、隣接するポリゴンはそのポ

リゴンの間の稜線 (edge) を共有することにより、それらのポリゴンの隣接関係を記述する。ポリゴンは連続する稜線による閉じた図形であり、稜線は2つの頂点を接続する。

ポリゴンメッシュの長所として以下が挙げられる。

- 1) 表現方法が簡潔であり、データ量が少ない。
- 2) 形状変形において、直感的に変形することができる。例えば、1つの頂点を動かしたときにどのような変形がなされるかが把握しやすい。
- 3) 図2のように、稜線削除 (edge collapse) や頂点分離 (vertex split)¹⁾により位相構造を容易に変更することができる。
- 4) ポリゴンを高速にレンダリングできるハードウェアが普及しており、PCでも高速に描画できる。欠点としては、隣り合ったポリゴン間では隣接関係が記述されているが、隣接していないポリゴンとの関係(近いか遠いか)が直接には記述されていないことが挙げられる。そのため、広い範囲の複数のポリゴンを同時に変形させることは容易ではない。この欠点を克服するために多重解像度表現を用いた変更手法(例えば²⁾)が提案されている。

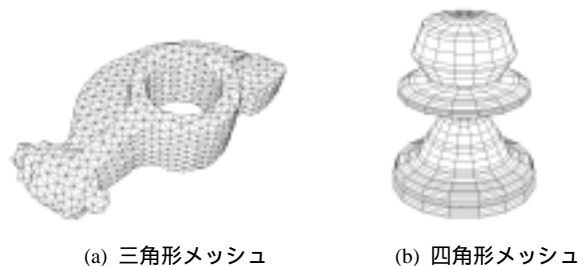


図1 ポリゴンメッシュモデル

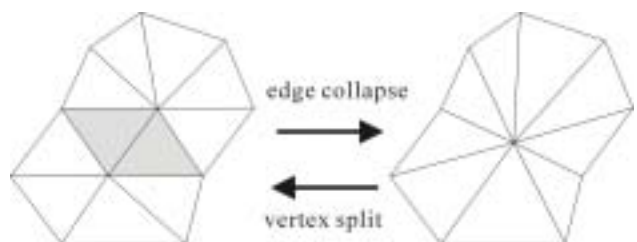


図2. Edge-collapse と vertex-split

* 原稿受付：2004年6月30日

** 静岡大学工学部機械工学科
(〒432-8561 静岡県浜松市城北3-5-1)

ポリゴンメッシュは表現の簡潔さから CG では広く用いられているが、意匠設計のために厳密な表現が必要とされる CAD においては、ポリゴンメッシュのみで設計や製造のすべての工程をカバーすることは困難である。

2.2 NURBS

NURBS は Non-Uniform Rational B-Spline の略語であり、その名前が示すように B-spline の拡張表現である (NURBS に関する代表的な参考書としては Bartels³⁾ や Piegl⁴⁾ がある)。平面はもとより自由曲面を含む形状を厳密に表現できることから、CAD における標準的な形状表現となっている。NURBS 曲面は 2 つのパラメータ u, v の方向に独立の次数を持つことができるが、意匠設計においては滑らかさと制御性の兼ね合いから双 3 次 (双方向ともに 3 次) の曲面が多用されている。双 3 次の場合、 u 方向 4 個、 v 方向 4 個、したがって、 $4 \times 4 = 16$ 個の制御点により 1 つのパッチ (曲面の最小単位) の形状が決定される (図 3 参照)。

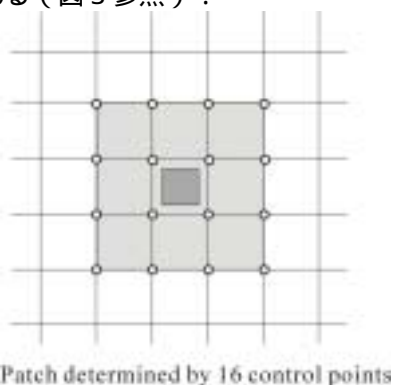


図 3. 双 3 次 NURBS 曲面

NURBS の長所は：

- 1) 制御多面体 (制御点により構成される多面体) と曲面形状が類似しており、デザイナーが制御多面体から容易に曲面形状を予測することができる
- 2) 凸閉包性 (convex hull property: 制御多面体により求まる凸包の中に曲面が含まれる性質) を持ち、曲面の存在範囲が凸包内に限定される、ことなどが挙げられる。これらの長所は Bézier や B-spline 曲面にも付随した性質である。これらの長所に加えて、NURBS は有理化されているので、球面や円筒面などの 2 次曲面を厳密に表現することができる。

短所としては、

- 1) 表現方法が複雑であり、使いこなすにはある程度習熟する必要がある、
- 2) パッチは四角形を基本とし、その他の角形を表すには、トリミングによりパラメータ空間を限

定する必要がある、

- 3) パラメータ空間を限定しないのであれば、位相を変更することができないとともに、穴が開いた形状のような複雑な位相を表現することができない、
- 等が挙げられる。補足として、NURBS は変動減少性 (variation diminishing property: 制御点の配置の変動よりも曲面の変動が抑えられる性質) を持たない⁴⁾ことを記しておく。

2.3 細分割曲面

近年 CG 分野で頻りに利用されるようになっている細分割曲面は、ポリゴンメッシュと NURBS の長所を兼ね備えており、CAD/CAM 分野での利用が期待されている表現法である⁶⁾。細分割曲面も NURBS と同様に制御多面体で定義され、自由曲面を厳密に表現できるとともに、ポリゴンメッシュのように位相に対する制約がゆるく、複雑な位相を持つ任意の n 角形の多面体に細分割規則を適用できる。

細分割曲面の長所は：

- 1) 曲面生成のための計算が数値的に安定である、
 - 2) その計算アルゴリズムの実装が容易である、
 - 3) 巨大メッシュにも無理なく適用できるスケールな性質を持つ、
 - 4) 複雑な位相構造を持つ立体を表現できる、
- 等が挙げられる。

1 回の細分割は局所的な幾何操作で実現でき、2 回から 3 回の細分割を行った後、制御頂点を極限点 (無限回細分割を行った場合の頂点位置) に移動させることにより、通常表示に必要な十分な滑らかさが得られる。このため、巨大なメッシュに対しても数値的に破綻することなく細分割規則を適用することができる。

短所として、NURBS と同様に、ポリゴンメッシュに比べると表現は複雑であり、ある程度の習熟が必要であることは否めない。

3. NURBS 曲面理論

NURBS 理論については 1 冊の厚い本が書けるほどに豊富であり、この解説では基本的な事項について概説するに留める。興味のある読者は前述した 2 冊の本³⁻⁴⁾や、Bézier や B-spline を含む自由曲線・曲面についての、より広い範囲の基礎を学ぶには Farin⁷⁾を参照していただきたい。

NURBS 曲面は、制御点 P_{ij} と各制御点に対応する重み w_{ij} 、さらに u 方向と v 方向のノット列 (ノットベクトル) u_i, v_i によって定義される区分有理式曲面である。有理 Bézier 曲面において、重みを相対的

に大きくすると対応する制御点に曲面が引き付けられるのと同様に、NURBS においても重み w_{ij} が曲面の形状に対する制御点の影響力を左右し、大きければ大きいほどその制御点の影響力が増し、その点の位置に曲面が引き付けられる。すべての重みが等しい場合には B-spline 曲面となる。

NURBS 曲面はテンソル積曲面の一種であり、NURBS 曲線の混ぜ合わせ関数(blending function)の積として、制御点の混ぜ合わせ関数が定義される。したがって、 u 方向の次数を m 、 v 方向の次数を n 、パッチの個数が u 方向に M 個、 v 方向に N 個、合計 MN 個となる NURBS 曲面 $S(u, v)$ は次式で定義される。

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m-M-1} \sum_{j=0}^{n-N-1} w_{ij} P_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^{m-M-1} \sum_{j=0}^{n-N-1} w_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}$$

ここで、 $N_i^m(u)$ 、 $N_j^n(v)$ はそれぞれ m 次、 n 次の B-spline 基底関数であり、次のように再帰的に定義される。

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & (u_i \leq u < u_{i+1} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

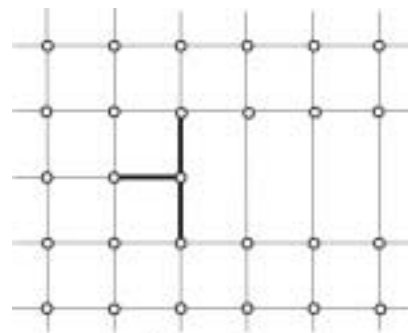
$$N_i^j(u) = \frac{(u - u_i) N_i^{j-1}(u)}{u_{i+j-1} - u_i} + \frac{(u_{i+j} - u) N_{i+1}^{j-1}(u)}{u_{i+j} - u_{i+1}}$$

j は基底関数の次数であり、 $j+1$ をオーダ(位数)と呼ぶ。

NURBS 理論は、ほぼ完成の域に達していると考えられるが、位相についての強い制約を少しでも緩めようとする試みの1つとして、Sederberg 等は T-splines を提案している⁸⁾。これは、これまでのテンソル積曲面の表現では T ジャンクション(稜線の T 字での接続、図4 参照)を許さなかったが、彼らの提案している表現法では、パッチが定義可能な範囲でその存在をを許している。次に述べる細分割曲面の持つ位相に関する柔軟さとは異なる考え方であり、細分割曲面に彼らのアイデアを適用したものととして T-NURCCs (Non-Uniform Rational Catmull-Clark surfaces with T-junctions)も提案している。

4. 細分割曲面理論

細分割の基本的な考え方は、区分線型関数 (piecewise linear function) $f^0(x)$ を繰り返し再帰的に精緻化 (refinement) することにより、より詳細化された関数の列 $f^1(x)$, $f^2(x)$, ... を生成し、その極限として目的関数 $f(x)$ を定義する。1974 年、Chaikin より始めて細分割手法⁹⁾が提案された。



T junction

図4. T-splines

Chaikin のアルゴリズムは Catmull と Clark や Doo と Sabin に曲面を生成するために細分割を用いることを思いつかせた。細分割による曲面の生成が画期的であるのは、任意の位相を持つ滑らかな曲面が構成できる点にある。

細分割曲線が制御ポリゴンを繰り返し精緻化して生成されるのと同じように、細分割曲面は、制御多面体(あるいは、制御メッシュ) M^0 を精緻化し、より細かなメッシュからなる M^1 , M^2 , ... を順次生成し、その極限曲面として定義される。

曲面の細分割の生成手順は、分割(splitting)と平均化(averaging)の処理からなる。分割には、面を分割する face scheme と、頂点を分割する vertex scheme がある。図5 に示す Catmull と Clark により開発された細分割曲面¹⁰⁾ は面を分割する face scheme の1つであり、テンソル積双3次 B-spline 曲面の拡張になっている。Doo と Sabin の細分割曲面¹¹⁾ (図6 参照)は vertex scheme の1つであり、テンソル積双2次 B-spline 曲面の拡張になっている。



図5 Catmull-Clark 再分割曲面



図6. Doo-Sabin 再分割曲面

4.1 Catmull-Clark 曲面

ここでは、face scheme の代表的な例である Catmull-Clark 曲面について取り上げる。face scheme

は生成されるポリゴンが三角形である場合と四角形である場合に分類される．図5に示したように，Catmull-Clark 曲面では新たに生成されるポリゴンはすべて四角形である．四角形はそれに含まれる頂点が同一平面上にある必要はない．

Catmull-Clark 曲面の細分割規則は以下のように記述される¹⁰⁾． n 角形の面の細分割規則は，

- 1) 各面に対して，面を構成するすべての頂点の平均をその座標とする新しい面点(face point)を生成する．
- 2) 各稜線に対して，稜線の端点の頂点とその稜線の両側の新しい面点の平均をその座標とする新しい稜線点(edge point)を生成する．
- 3) 頂点(vertex point)の座標を以下の式により更新する．

$$Q/n+2R/n+S(n-3)/n$$

ここで， Q はその頂点に隣接するすべての新しい面点の平均であり， R はその頂点を端点として持つ古い稜線の中点の平均， S は頂点の元の座標である．

4.2 細分割曲面の分類

Catmull-Clark 曲面や Doo-Sabin 曲面は他に先駆けて提案された細分割曲面であることや，B-spline 曲面の拡張となっていることからよく知られているが，それらの曲面以外にも様々な細分割曲面がこれまでに提案されている．

細分割曲面は以下の4つの基準により分類することができる¹²⁾：

- 1) 精緻化の型(face scheme か，vertex scheme か)
- 2) 生成されるメッシュの型(三角形か，四角形か)
- 3) 近似か，内挿か，
- 4) 規則的メッシュの極限曲面の連続性(C^1 ， C^2 等)．

face scheme に属する曲面として，近似である Loop¹³⁾ (C^2 ，三角形)，Catmull-Clark (C^2 ，四角形)，内挿である Modified Butterfly¹⁴⁾ (C^1 ，三角形)，Kobbelt¹⁵⁾ (C^1 ，四角形)が代表的である．vertex scheme に属する曲面として，近似である Doo-Sabin や Midedge¹⁶⁾ (ともに C^1)，Biquartic¹⁷⁾ (C^3)がある．これらの分類法にうまく適合しないルート3細分割曲面¹⁸⁾や4-kメッシュの細分割¹⁹⁾といった新たな曲面も考案されている．また，細分割曲面にノットの考えを導入しNURBSを拡張させたNURSS(Non-Uniform Recursive Subdivision Surface)²⁰⁾も提案されている．Catmull-Clark 曲面と Doo-Sabin 曲面との関係は参考文献²¹⁾を参照していただければ幸いである．

5. 細分割曲面の適応的分割

筆者らは，細分割曲面の適応的分割について，視

点に依存しない適応的細分割 SNUS(selective non-uniform subdivision)²²⁻²³⁾を提案した．ここではその手法について説明する．

5.1 SNUS

細分割曲面は与えられた制御メッシュを繰り返し精緻化(refinement)して生成される一連のメッシュの極限曲面(limit surface)として定義される．この精緻化は通常 knot-doubling と呼ばれる技法を用いて，メッシュのすべての面について均一に実行される．この均一な詳細化は極限曲面に十分近似している領域に対しても不要な細分割を実行し，結果として詳細化されたメッシュのポリゴン数が指数関数的に増大してしまう．

そこで我々は，選択的にノット間隔(knot spacing)の中点へノットを挿入することにより，上記の問題を解決する手法を実現した．ノットを選択的に挿入するとノット間隔が均一にならず，非一様再帰細分割曲面(NURSS)²⁰⁾の細分割と類似した処理となるため，我々の手法を選択的非一様細分割(selective non-uniform subdivision: SNUS)と呼ぶことにする．この手法を用いれば以下に示すように効率の良い適応細分割を容易に実装することができる．

5.1 Doo-Sabin 曲面の選択的細分割

制御メッシュが規則的であれば，曲線の選択的細分割技法を曲面へ適用するのは容易である．Doo-Sabin の再分割曲面は，図6に示すように角を落としていく操作である．そこで，ノットを挿入する必要のない部分のコーナは切り取らなければよい．

選択的な細分割によって，コーナ切り取りは以下の3つに分類される．

- 1) 2つのパラメータ方向に切り取る(元の規則)
- 2) 1つのパラメータ方向にのみ切り取る，
- 3) 切り取らない．

図7に示すように，Doo-Sabin 細分割は古い頂点の各々に対して隣接する面に1個ずつ計4個の新たな頂点を生成する．このような1つの頂点を4個に分割する操作を vertex-split 操作と呼ぶ．新しく生成された頂点を接続して新たな面を生成することでポリゴンが精緻化される(図7の右図)．

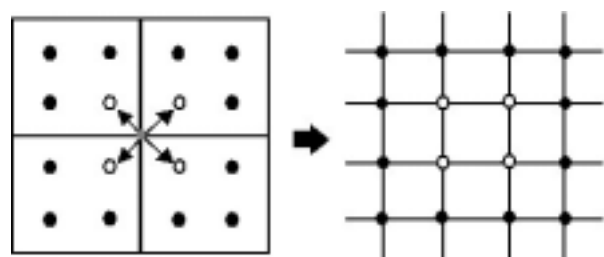


図7. 新たに生成される頂点

Doo-Sabin 細分割では，規則的なメッシュに対して新たな頂点の位置を(9, 3, 3, 1)マスクにより決定する．このマスクの値を用いて，重み付き平均を計算したものが新しい頂点座標となる．

細分割アルゴリズムを考えると，すべての頂点が4本の稜線に接続することを前提としてよい．なぜなら，このような接続は，任意のメッシュに対して通常の Doo-Sabin 細分割を1回施すことにより実現されるからである．

選択的細分割では，部分的に頂点を4個に展開することになるが，残念なことに，極限形状を変えずに選択的細分割を可能とする再帰的な細分割マスクを求めることが困難である．そこで，図8に示すように，面の重心と古い頂点位置との中点に新たな頂点を生成することで細分割規則を簡単化する．この場合，細分割マスクは(5, 1, 1, 1)と書ける．この規則に基づいて選択的再分割を定義する．

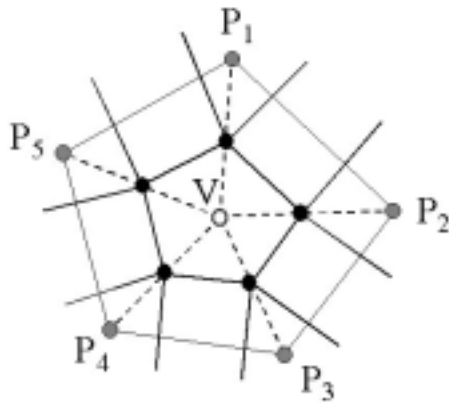


図8. 再分割の簡単化

この再分割規則を用いると，選択的に頂点に対して vertex-split 操作を繰り返し実行しても，図9に示した面 $A^aB^bC^cD^d$ ($a, b, c, d \geq 1$, ただし, a, b, c, d は頂点に再分割を施した回数) の重み付き平均:

$$\mathbf{V} = \frac{2^a \mathbf{A} + 2^b \mathbf{B} + 2^c \mathbf{C} + 2^d \mathbf{D}}{2^a + 2^b + 2^c + 2^d}$$

は a, b, c, d の値に因らず一定である．このことは簡単な計算により確認できる．この性質を利用することで，極限形状を変えない選択的な細分割が実現できる．

図9(a)は頂点の一つのみを vertex-split 操作により展開して生成された面を示している．図9(b)の数値はノット間隔の値を示している．選択的細分割を行うと三角形の穴が生成されるのでそれを新たな面で埋める．このような三角形の面を「中間面」，中間面のコーナを「中間コーナ」と呼ぶ．中間コーナは三角マークで示している．

vertex-split 操作のためのアルゴリズムを記述するために，いくつかの表記法を定義する．頂点 v を

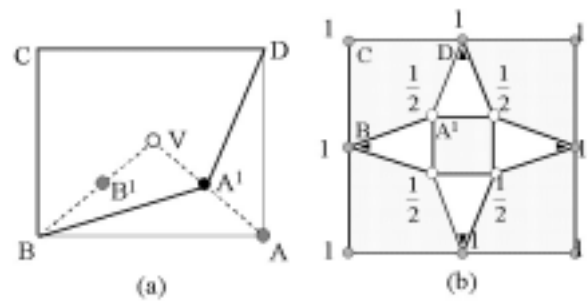


図9. 生成された頂点と面: (a) 頂点 A, B の位置 (b) 中間面と中間コーナ.

分割する操作を $\text{split}(v)$ で表す． v に連結された頂点の集合を $\text{star}(v)$ で表す．また， v_i が中間コーナを含むならば $\text{marked}(v_i)$ が真となるものとする．これらの表記法を用いると，図10の頂点 P を分割するアルゴリズムは以下のように記述される．

- (1) 頂点 P に関して， $\text{star}(P)$ が頂点 v_i を含み，かつ $\text{marked}(v_i)$ が真であれば， P を分割する前に v_i を分割する．vertex-split 操作は再帰的に呼び出す．
- (2) 中間面でない4個の隣接する面を利用して4個の新たな頂点位置を計算する．図10(b)において，頂点 P_1 と P_2, P_3, P_4 が生成される．
- (3) P の周りの面を f_1, f_2, \dots, f_5 とする．もし f_1 が中間面でないならば， f_1 の頂点 P を新たな頂点 P_1 で置き換える． f_5 のような中間面ならば中間コーナを2個の新たな頂点で置き換える．図10(c)において， f_1 と f_2, f_3, f_4 の P の位置は修正され， f_5 は四辺形面に変換される．
- (4) 穴を埋めるため三角面を生成する．図10(d)に示すように新たな三角面のコーナにマークを付加する．

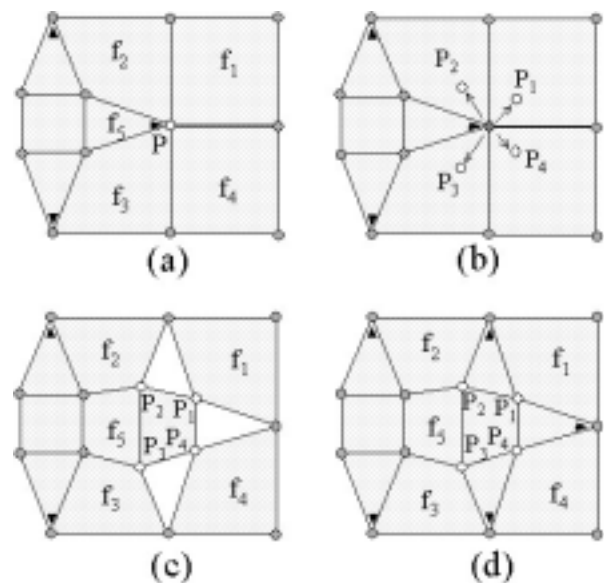


図10. 選択的再分割の手順

ノット間隔は、各頂点からスタートする半稜線に初期値 1 としてノット間隔 d_i を割り当てる。頂点 v_i を分割するとき、新たに生成される頂点からの半稜線のノット間隔として $d_i/2$ を割り当てる。

図 11 は選択的細分割の例を示し、18 個の面が 451 に細分割されている。この細分割では現在の頂点位置とその極限位置との距離の長い順に頂点を分割している。

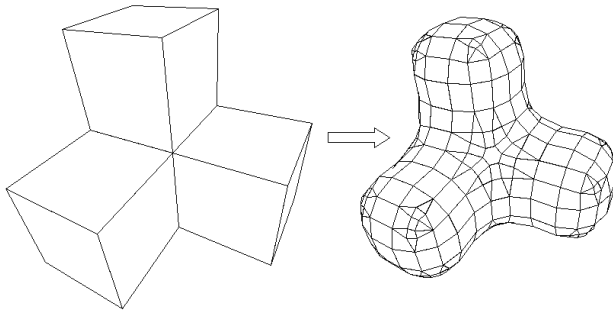


図 11. 選択的再分割の例.

5.3 Catmull-Clark 曲面の選択的細分割

Catmull-Clark 曲面への SNUS は以下の性質を持つ。

- 1) 規則的なメッシュに対しては、各面はその等パラメータ線に沿って 2 個、あるいは 4 個の面に分割される。
- 2) 必要であれば特異点 (extraordinary point) を持つ面はその特異点周りの面とともに常に 4 個の面に分割される。
- 3) すべての頂点の極限点はオリジナルメッシュの極限曲面上に存在することを保証する。

Catmull-Clark 曲面への SNUS について説明する前に、非一様双 3 次 B-spline 曲面へのノット間隔の中央にノットを挿入する際の、頂点位置の移動パターンについて解析する。各々のパラメータ方向へ 2 つずつ合計 4 つのノットを挿入すると、B-spline 曲面の制御点は図 12 のようになる。黒線で示されたオリジナルのメッシュに、R でラベリングされている一点鎖線で示される等パラメータ線に沿ってノットを挿入すると、元のメッシュの黒線(G)上の二重丸の頂点は、灰色で塗りつぶされた二重丸の新しい位置へ移動する。一点鎖線上の灰色で塗りつぶされた点は新たに生成された頂点を示す。

Catmull-Clark 曲面にノットを選択的に挿入する場合、アルゴリズムを単純化するために、必要であれば 1 回 Catmull-Clark 細分割をメッシュに施すこととし、全ての面は四辺形と仮定する。

再分割においては、図 13 に示すように、1) 面が 4 つに分割される four-face 細分割、2) 面が 2 つの

面に分割される two-face 細分割、に分類される。ただし、図 13 の右下に示したように、two-face 細分割が他のパラメータ方向の two-face 細分割や four-face 細分割と隣接する場合、頂点の位置が一意に決まらない。したがって、そのような細分割は許さず、そのような細分割が起こる場合には隣接する 2 つの面に four-face 細分割を実行する。

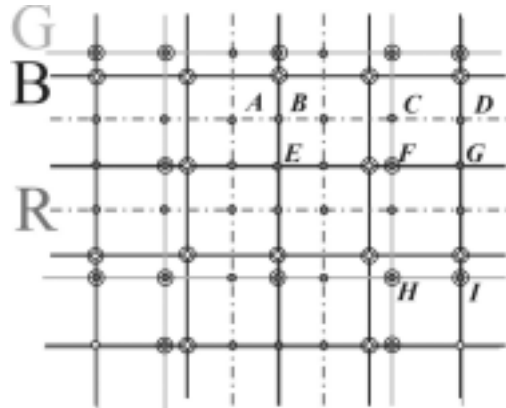


図 12. B-spline 曲面へのノット挿入

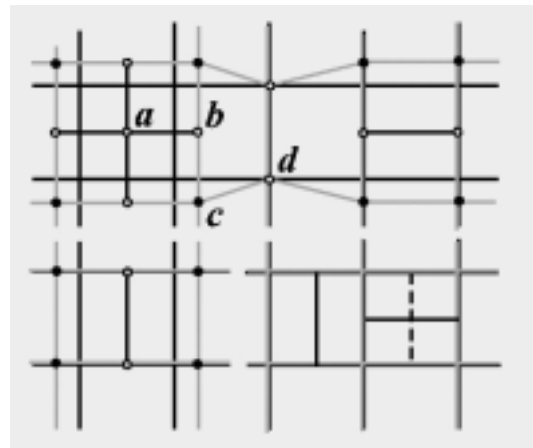


図 13. B-spline 曲面への選択的ノット挿入

頂点は、1) ノーマル、2) T 字、3) 浅い、4) 深い、に分類される。「T 字」頂点は分割された面とされていない面との境界に生成され、その valence は 3 である(図 13 の b)。

「浅い」(「深い」)頂点はその細分割深さがその頂点に接続された頂点より浅い(深い)頂点である。頂点 d は頂点 c より浅いので「浅い」と分類される。初期メッシュの頂点はすべて「ノーマル」である。

頂点 a はその頂点に連結する頂点のすべてが同じ深さの細分割によって生成、位置が移動されたので「ノーマル」である。「ノーマル」と他の頂点の区別は重要であり、もし「T 字」、「浅い」、「深い」頂点を含むなら、その周りでは細分割を実行しない。NURSS 細分割を局所的に実行することは可能であるが、その場合得られたメッシュから計算さ

れる極限曲面は初期メッシュのそれと異なってしまふ．Catmull-Clark 曲面への SNUS は以下のように要約される．

- (1) 前処理として，初期メッシュのすべての稜線に 1 を割り当てる．
- (2) 頂点周りの曲率などの評価基準によって分割すべき稜線を選択する．
- (3) 前ステップで選択した稜線を正対する稜線とペアリングし，それらの稜線に細分割フラグを付加する．
- (4) 少なくとも 1 つの選択された稜線を持つ面は，その面に含まれる稜線の細分割フラグを持つ稜線と「T 字」頂点の数により two-，あるいは four-face 細分割により細分割される．それらの数が 2，あるいは 4 であれば two-，あるいは four-face 細分割が実行される．曲面を細分割する前に，face や edge，vertex point の新しい位置と頂点の極限点を計算し，面，稜線，頂点にそれぞれ割り当て添付する．稜線と頂点に対しては，さらなる細分割時に取り得る可能性のある位置を割り当てる．
- (5) 選択された稜線やそれとペアリングされた稜線に連結した頂点の少なくとも一つが「T 字」の場合には隣接する面に two-face，あるいは four-face 細分割を施すことにより「ノーマル」に変換してから細分割を実行する．
- (5) 必要に応じて，2)から 5)までの処理を繰り返す．

上記のアルゴリズムは細分割において本質的に特異点を増加させないことに注意する．細分割の途中では「T 字」頂点が生成されるが，さらなる細分割によって「ノーマル」頂点へ変換される．

図 14 は一様 Catmull-Clark 曲面への簡単な応用例を示している．(a)と(c)は同じ初期メッシュから生成された細分割処理中のメッシュであり，(b)と(d)は頂点を極限点に移動させたメッシュである．頂点位置は初期メッシュの極限曲面上に存在する．評価基準の違いによりそれらの分割法は異なっている．

図 15 は別の Catmull-Clark 曲面の例である．ここで用いた評価基準は各稜線と頂点での平均法線との角度である．1 回と 2 回の SNUS 細分割により(b)と(c)のメッシュを生成している．(d)はメッシュ(c)のシェーディング図である．(b)と(c)の面数は 4301，7073 個であり，通常の細分割では 4712，18848 個となる．

SNUS が有用な典型的な例の 1 つは次数の上げられた細分割曲面である．変換された曲面は多重ノットを用いて表されており，多くのノット間隔は 0 に等しい．SNUS はノット間隔が 0，あるいは相対的

に非常に小さいメッシュにノットを挿入することを回避することができる．

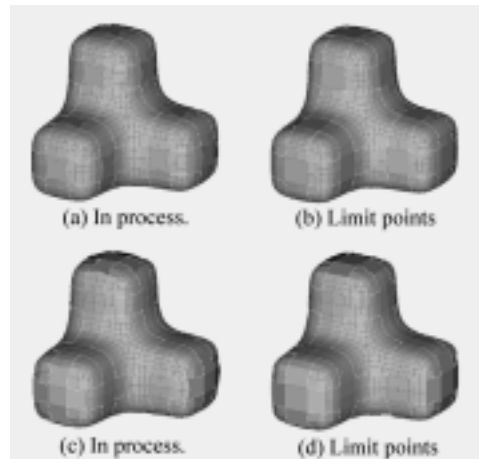


図 14. Catmull-Clark 細分割曲面への適用例(1)

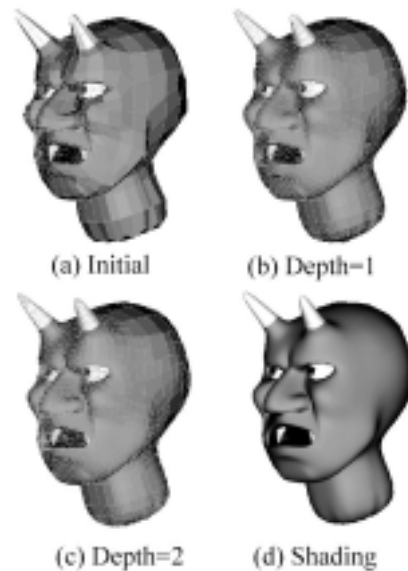


図 15. Catmull-Clark 細分割曲面への適用例(2)

図 16 はノット間隔に応じた選択的再分割により生成された Catmull-Clark 曲面の例である．濃い灰色の線と薄い灰色の線の稜線の初期ノット間隔はそれぞれ 0 と 1 である．SNUS の効果を明らかにするために，濃い線の稜線には 0 の代わりに 0.1 を割り当てた．通常の細分割は図 16(a)に示すメッシュを生成し，赤色の稜線の周りに多くのポリゴンが堆積し細分割深さを深くしても形状があまり改善されない．SNUS は不必要なポリゴンの堆積を避けることができる．メッシュファイル(obj 形式)の大きさは(a) 6.82 MB，(b) 2.11 MB である．SNUS により生成されたメッシュの大きさは標準的な細分割により生成されたメッシュの約 1/3 である．

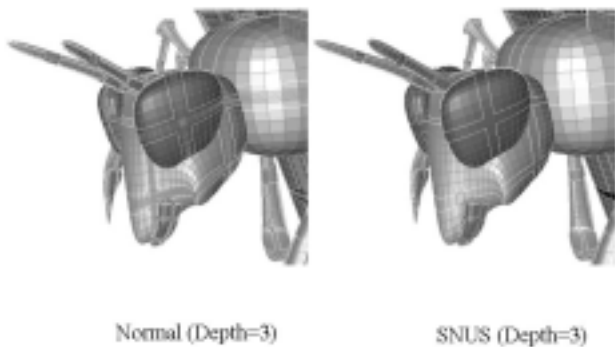


図 16. ノット間隔に応じた選択的再分割曲面

6. おわりに

この解説では、1) ポリゴンメッシュ、2) NURBS、及び 3) 細分割曲面についてそれらの 3 次元形状表現としての長所と短所について述べた。NURBS 曲面と細分割曲面についてはそれらの基礎理論について概説するとともに、各種文献や書籍へのポイントを示した。さらに、最近の研究成果の 1 つとして SNUS を紹介した。

今後 CAD/CAM 分野への細分割曲面のさらなる利用が期待される。細分割曲面は豊かな数学的理論を背景として持ち、例えば、多重グリッド法や流体などの物理シミュレーションとも密接な関係がある。興味のある読者は参考文献に挙げた書籍²⁴⁻²⁵⁾、あるいは SIGGRAPH のコースノート¹²⁾等を参照していただきたい。

参考文献

- 1) Hoppe, H., : Progressive meshes. ACM SIGGRAPH '96, (1996), 99-108.
- 2) Kobbelt, L., Campagna, S., Vorsats, J. and Seidel, H.-P.: Interactive Multi-Resolution Modeling on Arbitrary Meshes, ACM SIGGRAPH '98, (1998), 105-114.
- 3) Bartels, R., Beatty, C., and Barsky, B.: An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan Kaufmann, (1987).
- 4) Piegl, L and Tiller, W.: The NURBS Book, Springer-Verlag, (1997).
- 5) Prautzsch, H., and Gallagher, T.: Is there a geometric variation diminishing property for B-spline or Bezier surfaces, Computer Aided Geometric Design, Vol.9, No.2, (1992), 119-124.
- 6) Suzuki, H., Takarada, Y., Takeuchi, S., Kawano, I. and Hotta, J., S-CODE: A Subdivi-

- sion Based Coding System for CAD Models, Int. J. CAD/CAM, Vol. 3, No. 1, 2, (2004), 97-109.
- 7) Farin, G.: Curves and Surfaces for CAGD, Morgan Kaufmann, (1999).
- 8) Sederberg, T. W., Jianmin, Z., Bakenov, A., Nasri, A.: T-splines and T-NURCCs, ACM TOG, Vol.22, No.3, (2003), 477-484.
- 9) Chaikin, G.: An Algorithm for High-Speed Curve Generation, Computer Graphics and Image Processing, No.3, (1974), 346-349.
- 10) Catmull, E. and J. Clark, J.: Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes, Computer-aided Design, Vol.10, No.6, (1978), 350-355.
- 11) Doo, D. and Sabin, M.: Behaviour of Recursive Division Faces Near Extraordinary Points, Computer-aided Design, Vol.10, No.6, (1978), 356-360.
- 12) Zorin, D. and Schroder, P.: Subdivision for Modeling and Animation, ACM SIGGRAPH 2000, Course Note No.23, (2000).
- 13) Loop, C.: Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles, Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics, (1987).
- 14) Dyn, N., Gregory, J.A., and D. Levin, D.: A Four-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design, Computer Aided Geometric Design, Vol.4, (1987), 257-268.
- 15) L. Kobbelt, L., : Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology, In Proceedings of Eurographics 96, Computer Graphics Forum, (1996), 409-420.
- 16) Peters, J. and Reif, U.: The Simplest Subdivision Scheme for Smoothing Polyhedra, ACM Trans. Gr., Vol.16, No.4, (1997).
- 17) Qu, R.: Recursive Subdivision Algorithms for Curve and Surface Design, PhD thesis, Brunel University, (1990).
- 18) Kobbelt, L., Root 3 Subdivision, Computer Graphics Processings, Annual Conference Series, (2000), 103-112.
- 19) Velho, L. and Gomes, J.: Quasi 4-8 Subdivision Surfaces, In XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing, (1999).
- 20) Sederberg, T.W., Zheng, J. D., Sewell, J.D., and Sabin, M.: Non-Uniform Recursive Subdivision Surfaces, " ACM SIGGRAPH'98, Vol. 32, pp.387-394, (1998).

- 21) Miura , K.T. , Cheng F . and Wang , L.: ``Fine Tuning: Curve and Surface Deformation by Scaling Derivatives , " Proc . Pacific Graphics 2001 , pp.150-159 , 2001.
- 22) Miura , K.T. , Masuda , H , : Selective Non-Uniform Subdivision , Pacific Graphics 2002 , (2002) , 457-459.
- 23) 三浦 憲二郎 , 増田宏:選択的非一様細分割:SNUS , グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2002 予稿集 , (2002) , 49-54.
- 24) Stollnitz , E.J. , Deroose , T.D. , and Salesin , D.H. , Wavelets for Computer Graphics , Morgan Kaufmann , (1996) .
- 25) Warren , J . and Weimer , H.: Subdivision Methods for Geometric Design , Morgan Kaufmann , (2002) .