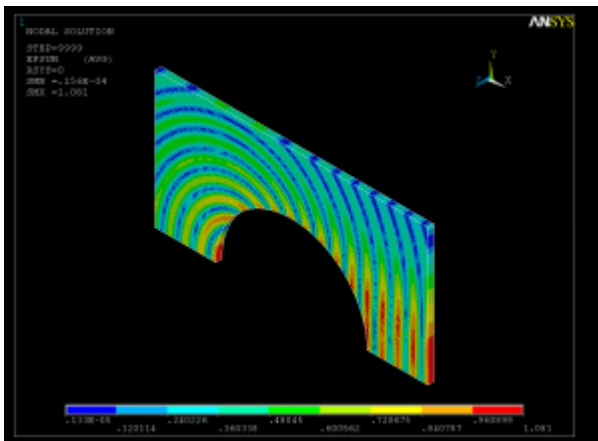
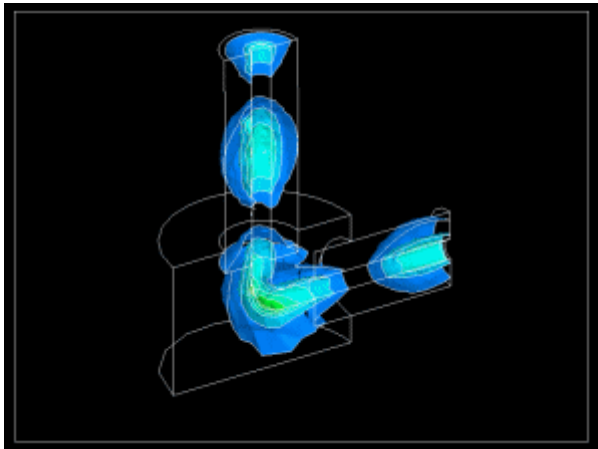


# 数值解析

2019年度前期 第4週 [5月9日]



静岡大学  
創造科学技術大学院  
情報科学専攻  
工学部機械工学科  
計測情報講座

三浦 憲二郎

# 講義アウトライン [5月9日]

---

- 非線形方程式

- 2分法

# 非線形方程式 p.70

•代数方程式の解  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

•4次方程式までは公式があり, 解ける.

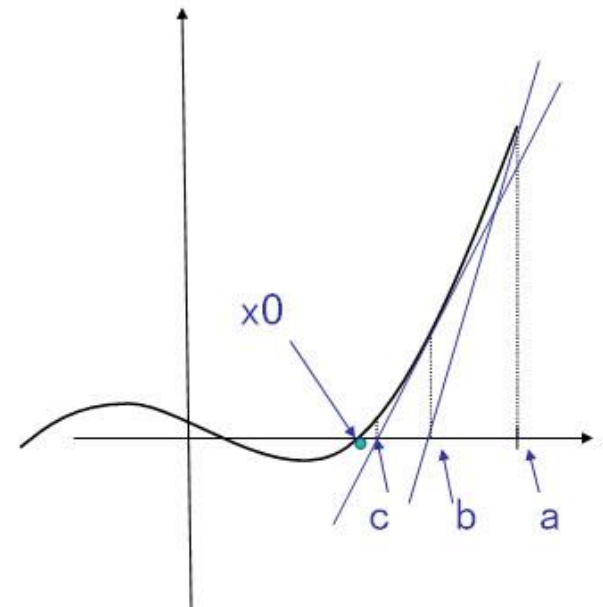
•5次以上の方程式に代数的解法は存在しない.

•数值的に解くしかない.

•高次の連立方程式, 三角関数など変数のn乗で表せない項を含む方程式

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

•数值的に解くしかない.



# 2分法 p.70

---

- 定理4.1 (中間値の定理) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で  $f(a) \neq f(b)$  ならば,  $f(a)$  と  $f(b)$  の間の任意の数  $k$  に対して  $f(c)=k$  となる  $c$  ( $a < c < b$ ) が存在する.

## 2分法

- 中間値の定理より,  $f(a) f(b) < 0$  ならば,  $f(c) = 0$ ,  $a < c < b$  となる  $c$  が存在する.
- (1) 何らかの方法で  $f(a) f(b) < 0$  となる閉区間  $[a, b]$  を求める.
- (2)  $c_1 = (a+b)/2$ 
  - (2a)  $f(a) f(c_1) < 0$  のとき, 解  $\alpha$  は  $[a, c_1]$  に存在する.
  - (2b)  $f(c_1) f(b) < 0$  のとき, 解  $\alpha$  は  $[c_1, b]$  に存在する.

(2a) では  $[a, b]$  の代わりに  $[a, c_1]$ , (2b) では  $[c_1, b]$  とする.
- ステップ(2)に戻り, 閉区間が十分に小さくなるまで繰り返す

# 2分法のアルゴリズム p.71

Input  $a, b, \epsilon$

Do

$$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

if  $f(a)f(c) < 0$  then

$$b \leftarrow c$$

else

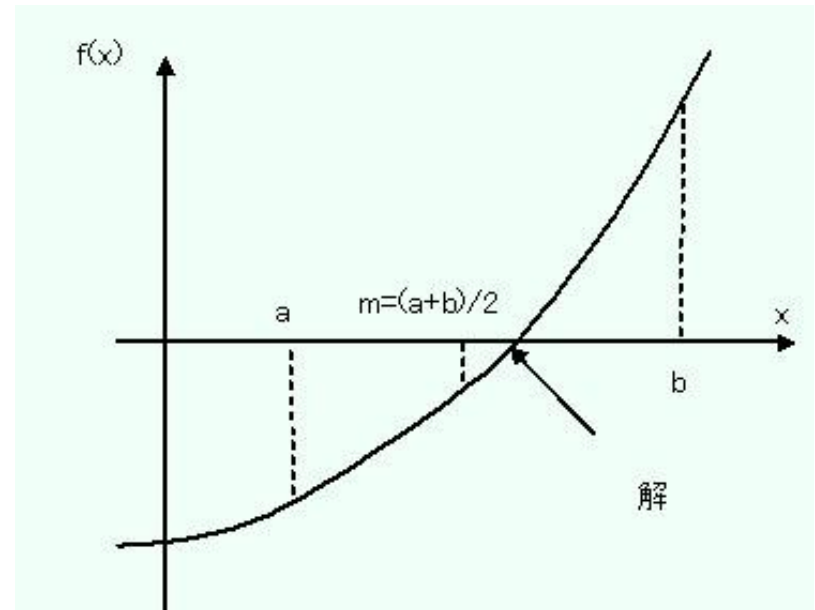
$$a \leftarrow c$$

end if

while(  $|a - b| \geq \epsilon$  )

$$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Output  $c$



# 2分法

区間  $[a, b]$  に解が1つしか存在しないのならば,

•  $n$  回目の区間  $d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{d_0}{2^n}$

•  $d_n < \epsilon$  のときに計算を打ち切るとすると, 必要な計算回数  $n$  は,

$$d_n = \frac{d_0}{2^n} < \epsilon$$
$$n > \frac{\log(\frac{d_0}{\epsilon})}{\log 2}$$

を満たす最小の自然数

絶対値誤差  $|c_n - \alpha| < \frac{d_n}{2}$

ステップ1) 区間  $[a, b]$  の求め方

- (1) 最初の区間  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , および 微小区間の幅  $h$  を与える.
- (2)  $n = (x_{\max} - x_{\min}) / h$  として分割数を定め,  $x_0 = x_{\min}$  とする.
- (3)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して,  $x_k = x_{\min} + kh$  とし,  $f(x_{k-1}) f(x_k) < 0$  なら  $[x_{k-1}, x_k]$  を対象区間にする.

# 2分法:プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double bisection(double a,double b,double eps); /* 2分法 */
double f(double x); /* 関数の定義 */
int main(void){
    double a,b,x,h,y1,y2,eps=pow(2.0,-30.0);
    int n;

    printf("初期区間[a,b]を入力してください。 ---> a b\n");
    scanf("%lf%lf",&a,&b);
    printf("区間の分割数nを入力してください。 ---> n\n");
    scanf("%d",&n);

    /* 対象区間を探索しながら2分法を適用 */
    h=(b-a)/n; y1=f(a);
    for(x=a+h;x<=b;x+=h){
        y2=f(x);
        if(y1*y2<0.0){
            printf("求める答えはx=%fです.\n",bisection(x-h,x,eps));
        }
        y1=y2;
    }
    return 0;
}
```

# 2分法:プログラム

---

```
/* 2分法 */
double bisection(double a,double b,double eps){
    double c;

    do{
        c=0.5*(a+b);
        if(f(a)*f(c)<0){
            b=c;
        }
        else{
            a=c;
        }
    }while(fabs(b-a) >=eps);/* fabs()は絶対値を返す。「C言語入門」p.264 */
    c=0.5*(a+b);
    return c;
}

/* 関数の定義 */
double f(double x){
    return x*(x*x*(x*x-5.0)+4.0); /* x*x*x*x*x-5.0*x*x*x+4.0*x */
}
```



# プログラム:実行結果

初期区間[a,b]を入力してください. --->a b

-3 3

区間の分割数nを入力してください. ---> n

10

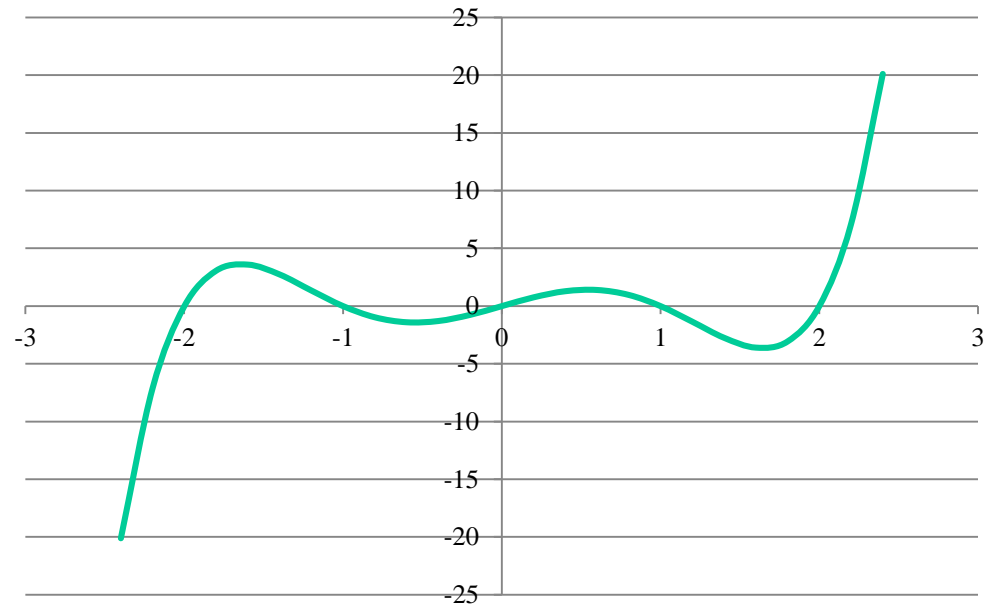
求める答えはx=-2.000000です.

求める答えはx=-1.000000です.

求める答えはx=-0.000000です.

求める答えはx=1.000000です.

求める答えはx=2.000000です.



# まとめ

---

- 非線形方程式

- 2分法